Autor: Thomas Tressel

DIAGNOSTISCHE FRAGEN

EINE DIDAKTISCHE HANDREICHUNG

Um als Lehrkraft im Unterricht passgenau agieren zu können, ist es sinnvoll, regelmäßig ein möglichst valides Feedback über den Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler einzuholen. Dies kann z.B. durch benotete Tests erreicht werden, aber oftmals genügen auch kurze Quizrunden im Plenum mit geeignet strukturierten Multiple-Choice-Fragen.

Nicht nur im Präsenzunterricht, sondern insbesondere auch im Fernlernunterricht ist es nach dem eventuellen Einsatz von Erklärvideos oder Phasen der Selbsterarbeitung eines Unterrichtsinhalts durch die Schülerinnen und Schüler wichtig, potentiell entstandene Fehlvorstellungen aufzuspüren und möglichst zu beseitigen, bevor sich diese verfestigen. Viele leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler stellen sich beim Betrachten eines Erklärvideos oder auch beim selbstständigen Durchlesen eines erklärenden Textes im Schulbuch oftmals leider nicht diejenigen wünschenswerten Verständnisfragen, die ein tieferes Durchdringen des Inhalts und ein Andocken an bereits bekannte Inhalte ermöglichen. Stattdessen können sich durch eine nur oberflächliche Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten unerkannte Verständnislücken und Fehlvorstellungen ausbilden.

Damit man als Lehrkraft im Unterricht schnell erfassen kann, welche Fehlvorstellungen bei einzelnen Schülerinnen und Schülern vorliegen, können sogenannte *diagnostische Fragen* eingesetzt werden. Hierbei handelt es sich um speziell aufgebaute Multiple-Choice-Fragen, bei denen nur eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig ist und die Wahl einer falschen Antwortmöglichkeit (d.h. einer der Distraktoren) auf das Vorhandensein einer typischen Fehlvorstellung schließen lässt.

Der Vorteil des Einsatzes von Multiple-Choice-Fragen im Unterricht ist, dass unkompliziert und ohne großen Korrekturaufwand ein schneller Überblick darüber gewonnen werden kann, inwiefern ein bestimmter Inhalt verstanden wurde oder nicht. Die Tatsache, dass hierbei alle Schülerinnen und Schüler für sich selbst eine Entscheidung treffen müssen, welche der vier Antwortmöglichkeiten ihrer Meinung nach die richtige ist, sorgt für eine kognitive Aktivierung vieler Schülerinnen und Schüler.

Idealerweise erhalten alle Schülerinnen und Schüler für das ganze Schuljahr kleine Kärtchen, auf denen die möglichen Antwortbuchstaben A, B, C und D abgedruckt sind, sodass diese nicht vor jedem Quiz ausgeteilt werden müssen und schnell griffbereit sind. Nach dem Stellen der Frage und einer kurzen Bedenkzeit halten alle Schülerinnen und Schüler auf das Signal der Lehrkraft gleichzeitig die Karte mit demjenigen Buchstaben hoch, den sie für den richtigen Antwortbuchstaben halten. Mit den Schülerinnen und Schülern sollte im Vorfeld vereinbart worden sein, dass sie ihre Wahl auch begründen können müssen und eventuell sogar Argumente dafür liefern können sollten, weshalb die nicht gewählten Antwortmöglichkeiten ihrer Meinung nach falsch sind. An jede diagnostische Frage schließt sich daher eine kurze Austauschphase im Plenum an, in der die Frage und ihre Antwortmöglichkeiten diskutiert werden. Hat keine der Schülerinnen und Schüler eine falsche Antwort gewählt, kann dieser Austausch natürlich kürzer ausfallen. Jedoch ist es auch in diesem Fall sinnvoll, kurz die Frage zu stellen, was sich denn eine Schülerin bzw. ein Schüler gedacht haben könnte, wenn einer der Distraktoren gewählt wurde. Setzt man diagnostische Fragen regelmäßig im Unterricht ein, so werden die zugrundeliegenden Spielregeln meist schnell zur Routine.

Eine sinnvolle Ergänzung ist es, dass sich alle Schülerinnen und Schüler zusätzlich zu ihrer gewählten Antwort eine Notiz dazu machen müssen, mit welcher Sicherheit auf einer Skala von 0 bis 5 sie davon überzeugt sind, dass die von ihnen gewählte Antwort tatsächlich die richtige ist. Man fordert also einen sogenannten *confidence score* ein. Aufgrund des sogenannten *Hypercorrection Effects* steigt nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Schülerinnen und Schüler vorhandene Fehlvorstellungen auch tatsächlich erfolgreich korrigieren, wenn es sich (überraschenderweise) herausstellt, dass eine Antwort falsch war, von der sie besonders überzeugt gewesen waren, dass sie richtig ist.

Im Präsenzunterricht und auch in Videokonferenzen im Fernlernunterricht können solche Quizfragen sowohl am Anfang wie auch nach der Erarbeitung eines neuen Inhalts sinnvoll sein. Speziell im Fernlernunterricht können die Antworten der Schülerinnen und Schüler zu diagnostischen Fragen auch digital eingesammelt und aufgrund ihrer Geschlossenheit zeiteffizient korrigiert werden.

Manchmal sind natürlich auch Multiple-Choice-Fragen denkbar, bei denen es mehrere richtige Antworten gibt und alle richtigen Antwortmöglichkeiten genannt werden müssen. Um schnell zu erfassen, welche Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern vorliegen, ist es aber bei kurzen mündlichen Quizrunden in der Unterrichtspraxis praktikabler, dass nur eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig ist und somit jede andere Antwortmöglichkeit möglichst eindeutig auf eine bestimmte Fehlvorstellung hindeutet.

Es lassen sich also die folgenden zentralen Eigenschaften einer diagnostischen Frage festhalten:

(1) Zu jeder Frage gibt es vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.

(2) Jede falsche Antwort lässt auf eine typische Fehlvorstellung schließen. Insbesondere sind die Distraktoren also nicht zufällig gewählt, sondern sie wurden von der Lehrkraft wohlüberlegt aufgrund erfahrungsgemäß häufig auftretender Fehlvorstellungen eingebaut.

(3) Die Distraktoren bilden idealerweise alle typischen Fehlvorstellungen ab, d.h. es sollte nicht möglich sein, die richtige Antwort zu wählen, wenn noch eine Fehlvorstellung vorhanden ist.

(4) Zur Entscheidung darüber, welche Antwort die richtige ist, sollten keine langwierigen Rechnungen notwendig sein. Insbesondere sollte sich eine diagnostische Frage auf einen ganz bestimmen, eng umgrenzten mathematischen Inhalt beschränken.

Das Erstellen einer guten diagnostischen Frage benötigt Zeit und kann auch gut in Kooperation mit Fachkolleginnen und Fachkollegen stattfinden, da die unterschiedlichen Unterrichtserfahrungen oft zu einem größeren Pool an typischen beobachteten Fehlvorstellungen führen und somit bessere Distraktoren gefunden werden können. Als Vorbereitung für den Einsatz einer diagnostischen Frage im Unterricht sollte sich die Lehrkraft auch überlegen, welche Argumente Schülerinnen und Schüler liefern könnten, die von der Richtigkeit einer falschen Antwort überzeugt sind, und wie man diese Argumente am besten entkräften könnte. Auch hier kann die Zusammenarbeit im kollegialen Fachteam hilfreiche Impulse liefern.

Im Internet sind diagnostische Fragen zu zahlreichen mathematischen Themen verfügbar, z.B. auf der Webseite www.diagnosticquestions.com.

Um nun die Eigenschaften einer diagnostischen Frage besser erläutern zu können, werden im Folgenden einige Beispiele diagnostischer Fragen zu verschiedenen Themen und mit verschiedenen Merkmalen vorgestellt und didaktisch analysiert.

Beispiel 1: Addition von Brüchen (als Beispiel für arithmetische Kompetenzen)

$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=?$	
A $\frac{7}{9}$	B $\frac{3}{2}$
C $\frac{9}{12}$	D $\frac{7}{6}$

Didaktische Analyse

Die richtige Antwort ist B, denn $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. Hier wurde bewusst am Ende noch gekürzt, damit diejenigen Schülerinnen und Schüler, welche die Addition der Brüche korrekt ausgeführt haben, noch gezwungen sind, sich von der Richtigkeit ihrer Antwort zu überzeugen und die anderen Antworten auszuschließen. Zudem ist das Erweitern und Kürzen von Brüchen eine zentrale Kompetenz im Zusammenhang mit der Addition von Brüchen.

Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die Antwort A wählen, begehen den typischen Fehler, dass zur Bildung der Summe der beiden Brüche jeweils die Zähler und jeweils die Nenner addiert werden. Antwort C wird von denjenigen Schülerinnen und Schülern gewählt, die sich zwar daran erinnern, dass man bei der Addition zweier Brüche zuerst einen gemeinsamen Nenner bestimmen muss, dann aber fälschlicherweise nicht den gemeinsamen Nenner beibehalten, sondern sowohl die beiden Zähler wie auch die beiden (gleichen) Nenner addieren.

Antwort D wird von denjenigen Schülerinnen und Schülern gewählt, die z.B. beim Erweitern des ersten Bruchs einen Fehler begehen. Zudem ist dieser Bruch größer als 1, genau wie auch das richtige Ergebnis, und somit aus einem weiteren Grund ein wichtiger Distraktor. Schülerinnen und Schüler, welche die Addition von Brüchen nicht komplett richtig durchführen können, aber durch eine grobe Abschätzung zur Erkenntnis gelangen, dass $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}>1$ gelten muss, könnten alleine aufgrund dieser Tatsache Antwort A und C ausschließen. Wären alle drei falschen Ergebnisse kleiner als 1, so könnte die richtige Antwort alleine aufgrund dieser Überlegung gewählt werden, obwohl die Addition von Brüchen, welche hier überprüft werden soll, noch nicht beherrscht wird. Eine wichtige Eigenschaft diagnostischer Fragen ist es jedoch, dass man nicht zum richtigen Ergebnis kommen sollte, wenn noch eine gravierende Fehlvorstellung vorhanden ist.

Beispiel 2: Umformen von Termen

Wie lässt sich der Term $yx-x$ noch schreiben?	
A y	B $y\cdot(x-1)$
C $x\cdot(y-1)$	D Der Term kann nicht anders geschrieben werden.

Didaktische Analyse

Wie diese Frage verdeutlicht, kann es an manchmal auch sinnvoll sein, eine Antwortmöglichkeit wie D einzubauen, da diese verstärkt zum Nachdenken über alle anderen Antwortmöglichkeiten anregt.

Schülerinnen und Schüler, die Antwortmöglichkeit A wählen, zeigen eine typische Fehlvorstellung hinsichtlich der Struktur von Termen und der Reihenfolge der Rechenoperationen. In der Diskussion dieser Antwortmöglichkeit im Plenum kann z.B. ein konkretes Zahlenbeispiel gewählt werden, es sollte jedoch auch auf die Bedeutung der Vorfahrtsregel „Punkt-vor-Strich“ eingegangen werden.

Eine typische Fehlvorstellung derjenigen Schülerinnen und Schüler, welche die Antwortmöglichkeit B wählen, ist die Vorstellung, dass die auszuklammernde Variable in einem Produkt an erster Stelle stehen muss, d.h. dass im Produkt yx nur die Variable y ausgeklammert werden kann.

Beispiel 3: Lösen von Gleichungen

Was ist der nächste bestmögliche Schritt zur Lösung der Gleichung $\frac{2}{3}x = 6$?	
A $+\frac{1}{3}$ auf beiden Seiten der Gleichung	B $-\frac{2}{3}$ auf beiden Seiten der Gleichung
C $\cdot\frac{2}{3}$ auf beiden Seiten der Gleichung	D $:\frac{2}{3}$ auf beiden Seiten der Gleichung

Didaktische Analyse

Die richtige Antwort ist D, denn die Zahl $\frac{2}{3}$ wird mit x multipliziert, und die Umkehroperation der Multiplikation ist die Division. Hier kann und sollte mit den Schülerinnen und Schülern auch thematisiert werden, wie diese Division durch einen Bruch konkret umgesetzt wird, d.h. dass letztendlich mit dem Kehrbruch multipliziert werden muss.

Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die Antwort A wählen, haben zwar wahrscheinlich erkannt, dass zur Auflösung der Gleichung nach x auf der linken Seite der Faktor $\frac{2}{3}$ entfernt werden muss, denken aber aufgrund der Tatsache $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, dass $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 1x$ gilt. Hier handelt es sich also um einen algebraischen Denkfehler. Wer Antwort B wählt, hat vermutlich den Fehler begangen, dass $\frac{2}{3}x$ nicht als $\frac{2}{3} \cdot x$, sondern als $\frac{2}{3} + x$ interpretiert wurde. Auch dies ist ein häufig zu beobachtender algebraischer Denkfehler. Antwort C wählt, wer erkannt hat, dass die Variable x mit $\frac{2}{3}$ multipliziert wird, jedoch noch nicht verstanden hat, dass zum Isolieren der Variablen dann die Umkehroperation der Multiplikation mit $\frac{2}{3}$ erforderlich ist.

Prinzipiell ist es bei diagnostischen Fragen im Bereich von Gleichungen nur bedingt sinnvoll, als Antwortmöglichkeiten mögliche Lösungen der Gleichung anzugeben, denn dann könnte die richtige Antwort durch Einsetzen der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten in die Gleichung bestimmt werden und man hätte als Lehrkraft kein valides Bild darüber erhalten, ob die Schülerinnen und Schüler die Gleichung denn nun selbstständig hätten lösen können oder nicht. Didaktisch sinnvoller ist es daher, wie im Beispiel nach dem nächsten richtigen Schritt zur Lösung der Gleichung zu fragen.

Dies sieht man auch an dem folgenden weiteren Beispiel zu Gleichungen:

Was ist der nächste bestmögliche Schritt zur Lösung der Gleichung $x^2 - x = 0$?	
A $+x$ auf beiden Seiten der Gleichung	B $:x$ auf beiden Seiten der Gleichung
C x ausklammern	D Wurzelziehen

Didaktische Analyse

Würde man hier statt der gewählten Distraktoren mögliche Lösungsmengen vorgeben, so würden viele Schülerinnen und Schüler die richtige Lösungsmenge $L = \{0; 1\}$ durch Einsetzen der beiden hierin enthaltenen Lösungen erkennen, d.h. durch eine reine Verifikation. Die meisten Schülerinnen und Schüler dürften erkennen, dass $0^2 - 0 = 0$ und $1^2 - 1 = 0$ gilt.

Selbstständig wäre die Lösungsmenge aber sicherlich nicht in allen Fällen richtig bestimmt worden, da oft eine der wenig zielführenden Ansätze, welche durch die Distraktoren A, B und D beschrieben werden, gewählt worden wäre.

Die Antwortmöglichkeit A ist wenig zielführend, während die Antwortmöglichkeit B nur dann richtig wäre, wenn man zugleich die Fallunterscheidung $x = 0$ bzw. $x \neq 0$ durchführen würde, was im Regelfall kaum einer derjenigen Schülerinnen und Schüler bedenkt, die diese Vorgehensweise wählen.

Wird Antwortmöglichkeit D gewählt, so verdeutlicht dies, dass die entsprechende Schülerin bzw. der entsprechende Schüler noch kein differenziertes Verständnis des Lösens quadratischer Gleichungen ausgebildet hat und vereinfachend davon ausgeht, dass jede quadratische Gleichung durch Wurzelziehen gelöst wird.

Diejenigen Schülerinnen und Schüler, welche die richtige Antwortmöglichkeit C wählen, müssen sich natürlich zudem klargemacht haben, welchen Nutzen das Faktorisieren von x hat, weshalb bei einer Diskussion dieser diagnostischen Frage selbstverständlich auch auf den Satz vom Nullprodukt eingegangen werden sollte.

Diagnostische Fragen lassen sich prinzipiell zu nahezu allen Themengebieten und Kompetenzen stellen. Im Folgenden sollen noch einige Beispiele für die gymnasiale Oberstufe vorgestellt werden.

Beispiel 4: Analytische Geometrie

Die folgende diagnostische Frage zur Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im Raum soll als Beispiel dafür dienen, wie vielschichtig die sich an die Frage anschließende Diskussion im Plenum verlaufen kann.

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden g und h. Beide Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade im Raum. Dann wissen wir sicher, …	
A dass die Richtungsvektoren von g und h identisch sind.	B dass die Richtungsvektoren von g und h Vielfache sind.
C dass die Stützvektoren von g und h identisch sind.	D dass die Stützvektoren von g und h Vielfache sind.

Didaktische Analyse

Die richtige Antwort ist B, jedoch ist eine Besonderheit an dieser Frage, dass es auf das genaue Lesen der Fragestellung ankommt, um zu erkennen, dass die Antwortmöglichkeit A nicht richtig ist. Mit den Schülerinnen und Schülern sollte in diesem Zusammenhang thematisiert werden, dass natürlich die Richtungsvektoren zweier Geraden g und h identisch sein können, wenn die Geraden identisch sind, aber dass dies nicht notwendigerweise der Fall sein muss – es genügt, wenn die Richtungsvektoren Vielfache sind. Dies ist die einzige Schlussfolgerung, die wir *sicher* ziehen können.

Neben der häufigen Fehlvorstellung, dass identische Geraden identische Richtungsvektoren haben müssen, wird häufig von Schülerseite aus hinsichtlich der Stützvektoren auch die Behauptung geliefert, dass die Stützvektoren identisch sein müssen, oder dass sie Vielfache sein müssen. Das letzte Argument deutet daraufhin, dass die Schülerin bzw. der Schüler die Beziehung der beiden Richtungsvektoren übergeneralisiert hat und unreflektiert einen entsprechenden Zusammenhang der beiden Stützvektoren postuliert. Um die eventuell vorhandenen Fehlvorstellungen auszuräumen, sowohl konkrete Beispiele für Geraden g und h zu betrachten wie auch die Bedeutung der einzelnen Bestandteile der Parameterdarstellung einer Geraden mithilfe einer geeigneten Skizze erneut zu verdeutlichen sowie die jeweils möglichen Variationsmöglichkeiten zu diskutieren, nämlich dass zwar Richtungsvektoren durch Vielfache ersetzt werden können, dies aber auf Stützvektoren im Allgemeinen nicht zutrifft. Bei jeder Geraden kann der Stützvektor durch den Ortsvektor eines beliebigen anderen Punktes auf der Geraden ersetzt werden. Vertiefend kann in diesem Zusammenhang noch angesprochen werden, dass beim Vorliegen einer Ursprungsgeraden alle möglichen Stützvektoren Vielfache voneinander und auch jeweils ein Vielfaches vom gewählten Richtungsvektor sind.

Das folgende Beispiel verdeutlicht, wie auch komplexere mehrschrittige Verfahren mithilfe von diagnostischen Fragen abgeprüft werden können. Um einen spezifischen Hinweis auf das Vorliegen einer bestimmten Fehlvorstellung zu erhalten, ist es weniger sinnvoll, bei komplexeren Verfahren vier Möglichkeiten für das Endergebnis zu nennen, aus denen die Schülerinnen und Schüler nach einer mehrminütigen Bearbeitungszeit das ihrer Meinung nach richtige Ergebnis auswählen. Man erfährt auf diese Weise nämlich nicht, an welcher Stelle genau eine Schülerin bzw. ein Schüler einen Fehler gemacht hat bzw. welche konkrete Fehlvorstellung vorliegt. Stattdessen kann wie im folgenden Beispiel der Lösungsweg in voller Länge abgedruckt und in Teilschritte unterteilt werden.

Jemand untersucht die Lagebeziehung der zwei Geraden g und h. In welchem Schritt, wenn überhaupt, wird der erste Fehler begangen?

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Da die Richtungsvektoren keine Vielfachen sind, müssen sich g und h entweder in einem Punkt schneiden oder windschief zueinander sein.

Schritt 2: $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rr} -1 + r = 1 & (I) \\ 9 = 3 + 2s & (II) \\ 2 + 5r = 7s & (III) \end{array}$

Gleichung (I) ist äquivalent zu $r = 2$ und Gleichung (II) zu $s = 3$.

Schritt 3: Somit hat das LGS eine Lösung. Die Geraden g und h schneiden sich folglich in einem Punkt S. Für diesen gilt: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow S(1|9|12)$

A Schritt 1	B Schritt 2
C Schritt 3	D Es wird kein Fehler begangen.

Der erste Fehler wird in Schritt 3 begangen, denn hier wird gefolgert, dass das LGS eine Lösung hat, obwohl keine Probe der erhaltenen Werte für r und s in Gleichung III stattgefunden hat. Auch dies ist ein häufiger Fehler, den Schülerinnen und Schüler begehen. Bei der Diskussion dieser Frage im

Plenum kann dann auch verdeutlicht werden, dass das Einsetzen des erhaltenen Wertes für r in die Parametergleichung der Geraden g beim Vorhandensein eines Schnittpunkts der beiden Geraden zum selben Ortsvektor führen müsste wie das Einsetzen des Wertes für s in die Parametergleichung der Geraden h. Dies ist hier aber nicht der Fall.

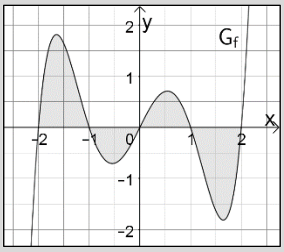
Beispiel 5: Integralrechnung

Welche Funktion F ist eine richtige Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = cos(2x)$?	
A $F(x) = \frac{1}{2} \cdot sin(2x)$	B $F(x) = sin(x^2)$
C $F(x) = cos(x^2)$	D $F(x) = sin(2x)$

Didaktische Analyse

Mithilfe dieser diagnostische Frage zu Stammfunktionen werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, die auf den ersten Blick sehr ähnlich strukturierten Antwortmöglichkeiten genau zu analysieren. Die Distraktoren bilden hier alle Varianten ab, die üblicherweise von Schülerseite aus genannt werden.

Antwort A ist die richtige Antwort, während bei Antwort B die Stammfunktion der äußeren und die Stammfunktion der inneren Funktion gebildet wurde, bei Antwort C nur die Stammfunktion der inneren Funktion und bei Antwort D nur die Stammfunktion der äußeren Funktion.

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f . Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f, welcher punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Welcher der Ausdrücke liefert den Inhalt der grau markierten Fläche?	
A $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$	B $2 \cdot \left\| \int_{0}^{2} f(x)\,dx \right\|$
C $2 \cdot \int_{0}^{1} f(x)\,dx + 2 \cdot \int_{1}^{2} f(x)\,dx$	D $2 \cdot \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + 2 \cdot \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

Didaktische Analyse

Mithilfe dieser diagnostischen Frage lassen sich viele typische Fehlvorstellungen bezüglich Integralen aufspüren. Wird die Antwortmöglichkeit A gewählt, so wurde noch nicht verinnerlicht, dass das Integral einen *orientierten* Flächeninhalt liefert. Dies ist eine gravierende Fehlvorstellung im Kontext von Integralen. Antwortmöglichkeit B wird von denjenigen Schülerinnen und Schülern gewählt, die zwar erkannt haben, dass das Integral einen orientierten Flächeninhalt liefert, die aber unreflektiert das Setzen des Betrags als „Allheilmittel" verstehen. Die richtige Antwort ist D, da hier jeweils diejenigen Abschnitte betrachtet wurden, bei denen die Fläche zwischen Graph und x-Achse oberhalb der x-Achse liegen und somit auch keine Beträge notwendig sind. Ohne den Distraktor C könnten Schülerinnen und Schüler argumentieren, dass Antwort D alleine deshalb wohl stimmen muss, da es die optisch am kompliziertesten daherkommende Antwort ist. Solche Argumente werden gerne vorgebracht. Daher hat der Distraktor C eine entscheidende Bedeutung, denn der Ausdruck erscheint ähnlich komplex, liefert aber das falsche Ergebnis, da auf einem der betrachteten Abschnitte der Graph unterhalb der x-Achse liegt, aber kein Betrag gesetzt wurde.

Beispiel 6: Gebrochenrationale Funktionen

Welche Gleichung hat die senkrechte Asymptote der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$?	
A $x = 0$	B $y = 0$
C $x = 1$	D $x = -1$

Didaktische Analyse

Auch dieses Beispiel verdeutlicht, wie sorgfältig bei einer diagnostischen Frage die Distraktoren gewählt werden, um bei Vorhandensein von Fehlvorstellungen die korrekte Beantwortung der Frage möglichst unmöglich zu machen. Zum einen muss zwischen senkrechten und waagrechten Asymptoten unterschieden werden können. Da nach der Gleichung der senkrechten Asymptote gefragt wird, scheidet Antwortmöglichkeit B aus. Um die falsche Antwortmöglichkeit A ausschließen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler den Unterschied zwischen einer (eventuell hebbaren) Definitionslücke und einer Polstelle (d.h. senkrechten Asymptote) verstanden haben. Der Distraktor D wird von Schülerseite aus gewählt, wenn ein häufiger arithmetischer Fehler begangen wird, während Antwortmöglichkeit C schließlich die richtige Antwort darstellt.

Beispiel 7: Trigonometrische Funktionen

Um schnell zu erkennen, welche Fehlvorstellung vorhanden ist, prüft man mit einer diagnostischen Frage üblicherweise nur einen kleinen Aspekt eines mathematischen Inhalts ab. Manchmal kann es aber auch sinnvoll und gewünscht sein, verschiedene Aspekte einzubauen. Hier sollten die Distraktoren dann aber trotzdem so gewählt werden, dass bei der Wahl einer dieser falschen Antworten schnell klar ist, welche Fehlvorstellung vorliegt.

Welche Aussage über die Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot sin(2x + 2) + 3$ ist richtig?	
A Die Periodenlänge ist 2.	B Die Amplitude ist -3.
C Die kleinste y-Koordinate aller Punkte auf dem Graphen von f ist 0.	D Man erhält den Graphen der Funktion f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = sin(x)$ durch Verschiebung um zwei Einheiten nach links.

Didaktische Analyse

Bei dieser diagnostischen Frage werden unterschiedliche Kompetenzen rund um trigonometrische Funktionen abgeprüft. Um Antwortmöglichkeit A auszuschließen, muss der Zusammenhang bzw. der Unterschied zwischen dem Faktor b in der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ und der Länge der Periode p der trigonometrischen Funktion verstanden worden sein. Um den Graphen der Funktion f aus dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = sin(x)$ zu erhalten, findet tatsächlich eine Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung sowie eine Spiegelung an der x-Achse statt. Dennoch ist Antwort B nicht richtig, da die Amplitude nicht der Faktor a ist, sondern $|a|$. Der Distraktor D ist besonders diffizil, da hier erkannt werden muss, dass das Ausmaß einer Verschiebung in x-Richtung erst erkannt werden kann, wenn der Faktor $b = 2$ faktorisiert wurde. In der Plenumsdiskussion im Anschluss kann dies z.B. wie folgt (auch durch entsprechenden Farbeinsatz) verdeutlicht werden:

$$sin(2\boldsymbol{x}) \xrightarrow[\text{Verschiebung um zwei Einheiten nach links}]{} sin\big(2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{2})\big) = sin(2x+4)$$

Antwortmöglichkeit C ist die richtige Antwort. Auch hier sollte in der anschließenden Diskussion geklärt werden, welche Parameter in der Funktionsgleichung zur Entscheidung über die Richtigkeit dieser Aussage relevant sind.

Beispiel 8: Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = \frac{1}{3}$. Welcher Ausdruck ist <u>*nicht*</u> äquivalent zu $P(X \geq 3)$?	
A $P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$	B $P(X > 2)$
C $1 - P(X \leq 3)$	D $P(3 \leq X \leq 5)$

Didaktische Analyse

Auch im Bereich der Stochastik sind diagnostische Fragen möglich und sinnvoll. Insbesondere im Kontext der Binomialverteilung tauchen zahlreiche Kurzschreibweisen auf, welche den Schülerinnen und Schüler anfangs oft nicht leicht fallen. Dieses Beispiel einer diagnostischen Frage verdeutlicht zudem, wie mit nur einer richtigen Antwortmöglichkeit als Strukturmerkmal diagnostischer Fragen dennoch das Erkennen verschiedener äquivalenter Ausdrücke abgeprüft werden kann, nämlich indem nach dem einen Ausdruck gefragt wird, welcher *nicht* äquivalent zum gegebenen Ausdruck ist. Die Antwortmöglichkeit A prüft ab, ob man ein grundlegendes Verständnis des Ausdrucks $P(X \geq 3)$ hat, während die Erkenntnis, dass auch die Antwortmöglichkeit B äquivalent zu $P(X \geq 3)$ ist, schon mehr verlangt. Hier fließt zudem das Verständnis ein, dass eine binomialverteilte Zufallsgröße nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Antwortmöglichkeit D ist ebenfalls äquivalent zu $P(X \geq 3)$, und diese Schreibweise fällt Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß anfangs besonders schwer. Zur Berechnung kumulierter Wahrscheinlichkeiten wie $P(X \geq 3)$ wird üblicherweise ein wissenschaftlicher Taschenrechner eingesetzt, wobei hier oft auf direkte Weise nur $P(X \leq k)$ berechnet werden kann und Ausdrücke wie $P(X \geq 3)$ somit zuerst mithilfe des Gegenereignisses umgeschrieben werden müssen. Der Distraktor C bildet den typischen Fehler ab, dass hier einfach das Ungleichheitszeichen umgedreht werden muss. Hier muss dann in der Diskussion thematisiert werden, dass im Gegenereignis die Zahl 3 nicht mehr vorhanden sein darf.

Literatur:

Barton, Craig. *How I Wish I'd Taught Maths: Lessons Learned from Research, Conversations with Experts, and 12 Years of Mistakes*. Melton, Woodbridge: John Catt, 2018.